Avril 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la $1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Partie I

a. La bilinéarité et l'antisymétrie se vérifient aisément. Pour le reste, remarquons que :

$$\omega(x,y) = 0 \Longleftrightarrow < \eta(x), y >= 0.$$

Le produit scalaire euclidien étant non-dégénéré,

$$\omega(x,y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow \eta(x) = 0.$$

Comme on est en dimension finie, la nullité du noyau est équivalente à l'inversibilité et le résultat est prouvé.

b. On considère, pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé :

$$\begin{array}{cccc} \phi_x & : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \omega(x,y) \end{array}$$

ϕ_x est linéaire et il existe un unique $\eta(x)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \qquad < \eta(x), y >= \phi_x(y) = \omega(x,y).$$

En outre, $x \longmapsto \eta(x)$ est linéaire. En effet, pour tout x_1, x_2, λ, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\begin{array}{rcl} < \eta(\lambda x_1 + x_2), y > & = & \omega(\lambda x_1 + x_2, y) \\ & = & \lambda\omega(x_1, y) + \omega(x_2, y) \\ & = & \lambda < \eta(x_1), y > + < \eta(x_2), y > \\ & = & < \lambda\eta(x_1) + \eta(x_2), y >, \end{array}$$

et c'est l'unicité qui permet de conclure à la linéarité de η. En outre,

$$\begin{array}{rcl} < \eta^*(x), y > & = & < x, \eta(y) > \\ & = & < \eta(y), x > \\ & = & \omega(x,y) \\ & = & -\omega(x,y) \\ & = & < -\eta(x), y >, \end{array}$$

et donc $\eta^* = -\eta$. En outre, la question précédente donne directement que η est inversible.

c. S'il existe sur $\mathbb{R}^n$ une forme symplectique, il existe en particulier un endomorphisme inversible η de $\mathbb{R}^n$ tel que $\eta^* = -\eta$. Mais alors, si λ est valeur propre de η de multiplicité k, $-\lambda$ est valeur propre de η^* de multiplicité k, et donc $-\lambda$ est valeur propre de η de multiplicité k (les endomorphismes sont réels, mais les valeurs propres peuvent être complexes). Comme 0 n'est pas valeur propre de η, et que n est la somme des multiplicités des valeurs propres de η, en regroupant chaque valeur propre avec son opposée, on trouve que n est pair.

d. 1) Comme $\underline{J}^* = -\underline{J}$ (vérification triviale sur les matrices), et $\underline{J}$ est inversible, ω_0 est symplectique.
2) Si $1 \leq k \leq m$ alors $\underline{J}e_k = e_{k+m}$ et par suite

$$\omega_0(e_k, e_l) = \begin{cases} 1 & \text{si } l = k+m; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

si $m+1 \leq k \leq 2m$ alors $\underline{J}e_k = -e_{k-m}$ et par suite

$$\omega_0(e_k, e_l) = \begin{cases} -1 & \text{si } l = k-m; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie II

1. Remarquons d'abord que J est inversible (son déterminant vaut 1). On a donc : $(\det(M))^2 \det(J) = \det(J)$, et $\det(M) = \pm 1$.
2. Clairement I_{2m} est symplectique. Si A, B sont symplectiques, alors

$${}^t(AB)JAB = {}^tB\,{}^tAJAB = J.$$

Finalement si A est symplectique alors A est inversible de plus ${}^tA^{-1}JA^{-1} = J$. Or

$${}^tAJA = J \Longleftrightarrow {}^tA^{-1}JA^{-1} = J$$

Il résulte que A^{-1} est symplectique. En conclusion, l'ensemble des matrices symplectiques est un groupe pour la multiplication.
3. On a $J^{-1} = {}^tJ$, ceci prouve que J est symplectique.

4. Nous avons :

$$\begin{aligned} AJ{}^tA &= {}^t(A{}^tJ{}^tA) \\ &= {}^t(AJ^{-1}{}^tA) \\ &= {}^t\left((A^{-1})^{-1}J^{-1}({}^tA^{-1})^{-1}\right) \\ &= {}^t({}^t(A^{-1})JA^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

Comme l'inverse d'une matrice symplectique est symplectique, la transposée d'une matrice symplectique est aussi symplectique.
5.a) Un calcul immédiat donne

$${}^tMJM = \begin{pmatrix} -{}^tAC + {}^tCA & -{}^tAD + {}^tCB \\ -{}^tBC + {}^tDA & -{}^tBD + {}^tDB \end{pmatrix}$$

M est symplectique si et seulement si

i) $-{}^tAC + {}^tCA = 0_m$.

ii) $-{}^tAD + {}^tCB = -I_m$.

iii) $-{}^tBC + {}^tDA = I_m$.

iv) $-{}^tBD + {}^tDB = 0_m$.

Les conditions $i)$ et $iii)$ sont identiques, tandis que $i)$ et $iv)$ se retraduisent en ${}^tAC$ et ${}^tBD$ sont symétriques.
b) Si une telle matrice existe, on a :

$$\begin{pmatrix} I_m & Q \\ 0_m & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - QC & 0_m \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & QD \\ C & D \end{pmatrix}.$$

On pose donc $Q = BD^{-1}$. Refaire le produit prouve que M s'écrit sous la forme demandée. On en déduit que

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det(A - QC) det(D) \\ &= \det({}^tA - {}^tC{}^tQ) det(D) \\ &= \det({}^tAD - {}^tC{}^tD^{-1t}BD), \end{aligned}$$

comme ${}^tBD$ est symétrique,

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det({}^tAD - {}^tC{}^tD^{-1t}DB) \\ &= \det({}^tAD - {}^tCB) = 1. \end{aligned}$$

Partie III

1. Soit M une matrice symplectique, que l'on écrit sous la forme $M = J^{-1t}M^{-1}J$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on désigne par P_A son polynôme caractéristique. Rappelons que 2 matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, et que le polynôme caractéristique d'une matrice et de sa transposée sont identiques. Nous avons alors :

$$P(\lambda) = P_{J^{-1t}M^{-1}J}(\lambda) = P_{{}^tM^{-1}}(\lambda) = P_{M^{-1}}(\lambda).$$

Mais,

$$\begin{aligned} P_{M^{-1}}(\lambda) &= \det(M^{-1} - \lambda I_{2m}) \\ &= \det(M^{-1}(I_{2m} - \lambda M)) \\ &= \det(M^{-1}) \det(-\lambda(I_{2m} - \frac{M}{\lambda})) \\ &= (-\lambda)^{2m} \det(I_{2m} - \frac{M}{\lambda}) \\ &= (-\lambda)^{2m} P(\frac{1}{\lambda}). \end{aligned}$$

2. Rappelons que λ_0 est valeur propre de multiplicité d de M si et seulement si λ_0 est racine de multiplicité d de P. Il suffit de prouver le résultat demandé pour $\frac{1}{\lambda_0}$ et $\overline{\lambda_0}$:

- Pour $\overline{\lambda_0}$: P est à coefficient réels, si λ_0 est racine de multiplicité d de P, $\overline{\lambda_0}$ aussi.
- Pour $\frac{1}{\lambda_0}$: C'est une application directe de III.1).

3. Rappelons que $\det(M) = 1$. Si d est la multiplicité de -1, on a :

$$(-1)^d \prod_{\lambda_i \text{vp} \neq -1} \lambda_i^{d_i} = 1.$$

Maintenant, on regroupe dans le produit chaque valeur propre avec son inverse qui est de même multiplicité, et $\dfrac{1}{\lambda_i^{d_i}}\lambda_i^{d_i} = 1$. On trouve donc : $(-1)^d = 1$, et donc -1 est de multiplicité paire. Comme la somme des multiplicités fait $2m$, et que si λ_i est de multiplicité d_i, on a :

$$\operatorname{mult}(\lambda_i) + \operatorname{mult}(\frac{1}{\lambda_i}) = 2d_i$$

Il résulte que la multiplicité de 1 est paire aussi.
4.

(a) I_4 est symplectique, et a une seule valeur propre.

(b) $J_2 = \begin{pmatrix} 0_2 & -I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est symplectique, son polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^4 + 1$ donc J_2 admet deux valeurs propres doubles distinctes i et $-i$.

(c) Considérons $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Un calcul facile montre que M est symplectique. En outre, M a bien une valeur propre double et deux valeurs propres simples.

(d) Expliquons briévement comment choisir M. Si par exemple $2i$ est une valeur propre de M, les autres valeurs propres sont $0.5i$,$-0.5i$ et $-2i$. Nous posons donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie que M est symplectique, et les valeurs propres de M sont $2i$,$0.5i$,$-0.5i$ et $-2i$.

Partie IV

1. On a

$$\begin{aligned}
(i) \iff & \forall x, y \in \mathbb{R}^{2m}, \quad < \underline{J}(\phi(x)), \phi(y)) >=< \underline{J}(x), y) > \\
\iff & \forall x, y \in \mathbb{R}^{2m}, \quad < \phi^*(\underline{J}(\phi(x))), y) >=< \underline{J}(x), y) > \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}^{2m}, \quad \phi^*(\underline{J}(\phi(x))) = \underline{J}(x) \\
\iff & M \quad \text{est symplectique.}
\end{aligned}$$

2. Remarquons que nous avons le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$, puisque toutes les normes y sont équivalentes. ϕ ayant des valeurs propres distinctes, ϕ est $\mathbb{C}-$diagonalisable. Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ de vecteurs propres, $\phi(x_i) = \lambda_i x_i$, $|\lambda_i| = 1$. Pour $x = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ de $\mathbb{C}^n$, nous choisissons $||x|| = |a_1| + \cdots + |a_n|$, qui définit aussi une norme sur $\mathbb{R}^n$ par restriction. Alors :

$$\begin{aligned}
||\phi^p(x)|| &= ||\lambda_1^p a_1 x_1 + \cdots + \lambda_n^p a_n x_n|| \\
&= |\lambda_1^p a_1| + \cdots + |\lambda_n^p a_n| \\
&= |a_1| + \cdots + |a_n| = ||x||.
\end{aligned}$$

En particulier, ϕ est stable.

3. a. En écrivant les produits matriciels, on prouve aisément que l'endomorphisme que nous noterons ϕ est symplectique si, et seulement si, ${}^t\Omega\Omega = I_m$, c'est-à-dire si, et seulement si, Ω est orthogonale. Maintenant, une matrice orthogonale conserve la norme euclidienne, notée $|| \, ||_2$. En particulier, si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^{2m}$, alors :

$$||\phi(X)||_2^2 = ||\Omega(x)||_2^2 + ||\Omega(y)||_2^2 = ||X||_2^2.$$

Il résulte que l'endomorphisme considéré est stable, par suite la CNS recherchée est : Ω est orthogonale.

b. Si cet endomorphisme ϕ possède une valeur propre de module $\lambda \neq 1$, alors d'aprés III.2., il en posséde une de module > 1. En particulier, il existe z dans $\mathbb{C}^n$ tel que

$$||\phi^k(z)|| \xrightarrow[k \to +\infty]{} \infty \qquad (*).$$

Or si ϕ était stable, en écrivant $z = x + iy$, où x et y sont dans $\mathbb{R}^n$, alors :

$$||\phi^k(z)|| \leq ||\phi^k(x)|| + ||\phi^k(y)|| \leq M,$$

absurde en vue de $(*)$.

4. a. Nous considérons par exemple l'endomorphisme symplectique dont la matrice écrite dans la base canonique est donnée par :

$$\begin{pmatrix} RI_m & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{R} I_m \end{pmatrix}$$

b. On a ϕ est symplectique $\Longleftrightarrow$ ϕ^* est symplectique et

$$\omega_0(\phi^*(e_1), \phi^*(e_{m+1})) = \omega_0(e_1, e_{m+1}) = 1.$$

D'autre part,

$$\omega_0(\phi^*(e_1), \phi^*(e_{m+1})) = (\underline{J}(\phi^*(e_1)), \phi^*(e_{m+1})),$$

si $||\phi^*(e_1)|| < 1$ et $||\phi^*(e_{m+1})|| < 1$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$|\omega_0(\phi^*(e_1), \phi^*(e_{m+1}))| < 1,$$

ce qui est absurde.

c. Supposons par exemple que $||\phi^*(e_1)|| \geq 1$, et posons $x = \dfrac{\phi^*(e_1)}{||\phi^*(e_1)||} \in B$. Si $y = \phi(x) = \sum y_i e_i$, alors

$$\begin{aligned} y_1 &= \ < y, e_1 > \\ &= \ < \phi(x), e_1 > \\ &= \ < x, \phi^*(e_1) > \\ &= \ ||\phi^*(e_1)|| \geq 1, \end{aligned}$$

En particulier $y \notin \Gamma_R$ et $\phi(B) \not\subset \Gamma_R$.

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

1. Calculer $I(x)=\int_{1/x}^{x}\frac{Lnt}{1+t^2}dt$ pour tout réel x strictement positif.

   Sans perte de généralité, on peut supposer que $x>1$,

   dans ce cas : $I(x)=\int_{1/x}^{x}\frac{Lnt}{1+t^2}dt=\int_{1/x}^{1}\frac{Lnt}{1+t^2}dt+\int_{1}^{x}\frac{Lnt}{1+t^2}dt$. Dans la première intégrale, on effectue le changement de variable $u=\frac{1}{t}$ et on obtient moins la deuxième, d'où $I(x)=0$.

2. On effectue le changement de variables : $x=au\cos\theta$ et $y=bu\cos\theta$ pour obtenir $J=\iint_D(x^2-2y)\,dx\,dy=\int_0^{\pi/2}(\int_0^1(a^2u^2\cos^2\theta-2bu\sin\theta)abu\,du)d\theta=\frac{ba^3\pi}{16}-\frac{2}{3}ab^2$.

Exercice n° 2

On considère la fonction numérique f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in Q\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

où Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.

1. Comme les ensembles Q et $R-Q$ sont denses dans R, tout nombre rationnel est limite d'une suite de nombres irrationnels et réciproquement. La fonction f n'est continue en aucun point de $[0,1]$. Pour $x\in Q,\ \exists(u_n)\in R-Q$ telle que : $(u_n)\to x$ et $\lim\limits_{u_n\to x} f(u_n)=0\neq f(x)=1$.

2. La fonction g est continue seulement en $x=1/2$ et non dérivable en tout point de $[0,1]$.

3. La fonction h est continue et dérivable seulement en $x=1/2$ et non dérivable ailleurs sur $[0,1]$.

Exercice n° 3

1. Si *p* est un nombre premier, $f(p^2)=pf(p)+pf(p)=2p$, puis $f(p^3)=pf(p^2)+p^2f(p)=3p^2$.

On vérifie par récurrence que $f(p^\alpha)=pf(p^{\alpha-1})+p^{\alpha-1}f(p)=\alpha\, p^{\alpha-1}$.

On calcule ensuite $f(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2})=p_2^{\alpha_2}f(p_1^{\alpha_1})+p_1^{\alpha_1}f(p_2^{\alpha_2})=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}(\dfrac{\alpha_1}{p_1}+\dfrac{\alpha_2}{p_2})$

Cela nous conduit à vérifier par récurrence sur *k*, l'expression :

$$f(n)=n\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{p_i} \text{ où } n=p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}.$$

2. L'égalité $f(n)=n$ implique $0\le\dfrac{\alpha_i}{p_i}\le 1$, soit $0\le\alpha_i\le p_i$, d'où $\dfrac{\alpha_i}{p_i}=1-\sum_{j\neq i}\dfrac{\alpha_j}{p_j}$

$\alpha_i = p_i(1-\sum_{j\neq i}\dfrac{\alpha_j}{p_j})$ ou encore $(\prod_{j\neq i}p_j)\times\alpha_i = p_i(1-\sum_{j\neq i}\dfrac{\alpha_j}{p_j})(\prod_{j\neq i}p_j)$

$(\prod_{j\neq i}p_j)\times\alpha_i = p_i\times(\prod_{j\neq i}p_j - A)$ avec $A=(\sum_{j\neq i}\dfrac{\alpha_j}{p_j})(\prod_{j\neq i}p_j)$

Ainsi p_i divise le produit $(\prod_{j\neq i}p_j)\times\alpha_i$ et il est premier avec le premier terme. Le théorème de Gauss montre que p_i divise α_i. Comme $0\le\alpha_i\le p_i$, on en déduit que :

$$\forall i\in\{1,...,k\} \quad \alpha_i=0 \quad ou \quad \alpha_i=p_i$$

Comme $\sum_{i=1}^{k}\dfrac{\alpha_i}{p_i}=1$, il n'existera qu'un indice *j* pour lequel $\alpha_j\neq 0$, et vaut p_i.

En conclusion *n* est bien de la forme $n=p^p$. La réciproque est évidente.

Exercice n° 4

1. $u_{n+1} - u_n = \int_1^e x(Lnx)^n (Lnx-1)dx < 0$. La suite (u_n) est positive et décroissante, donc elle converge. On peut aussi remarquer, en intégrant par parties que :
que : $u_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2}u_{n-1} > 0$, d'où $u_{n-1} < \frac{e^2}{n}$, et la suite converge vers 0.

2. La suite (v_n) est positive et majorée par $\frac{Ln2}{n+1}$, donc elle converge vers 0.

Exercice n° 5

On cherche à déterminer toutes les fonctions numériques continues f qui vérifient :

$$f(x) = -1 - \int_0^x (x-t)f(t)\,dt$$

Supposons que f soit une solution de cette équation, alors

$f(x) = -1 - x\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x tf(t)\,dt$ et en particulier $f(0) = -1$.

Le terme de droite de l'équation précédente étant dérivable, f est dérivable.

Et $f'(x) = -\int_0^x f(t)\,dt - xf(x) + xf(x)$, soit $f'(x) + \int_0^x f(t)\,dt = 0$.

Posons $y(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, on obtient l'équation différentielle : $y''(x) + y(x) = 0$.

La solution générale est $y(x) = A\cos x + B\sin x$ et avec les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$, $y(x) = -\sin x$ et $f(x) = -\cos x$.

On vérifie aisément que $f(x) = -\cos x$ est solution de l'équation proposée.

Exercice n° 6

D'après l'énoncé, on a donc 10 boissons de type B1 et 40 de type B2. Il y a $\binom{50}{4}$ façons de choisir 4 boissons parmi les 50.

1. On prélève, au hasard, 4 boissons dans une livraison de 50 boissons.

- La probabilité d'avoir 4 boissons de type B1 est égale à $\frac{\binom{10}{4}}{\binom{50}{4}} = \frac{3}{3290} \cong 0{,}00091$

- La probabilité d'avoir 1 boisson de type B1 et 3 boissons de type B2 est égale à $\frac{10 \times \binom{40}{3}}{\binom{50}{4}} = \frac{988}{2303} \cong 0{,}429$

- La probabilité d'avoir au moins une boisson de type B1 est égale à $1 - \frac{\binom{40}{4}}{\binom{50}{4}} = \frac{13891}{23030} \cong 0{,}603$

2. On prélève maintenant une boisson, on note son type et on la remet dans le lot. On réalise *n* fois cette expérience et on note X le nombre de boissons B1 obtenues.

- $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (4/5)^n$
- Combien de fois faut-il réaliser l'expérience pour être sûr à 90% d'obtenir au moins une boisson B1 ? Il faut que $P(X \geq 1) = 1 - (4/5)^n > 0{,}9$. Soit, en utilisant le logarithme décimal : $n > \frac{1}{\log(5/4)}$, d'où *n*=11.

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice

1. (a) Première méthode

   i. Pour tout entier $n \geq 1$,
   $$u_n - v_n = \frac{1}{n^2(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n})}.$$
   Donc la série de terme général (t.g.) $u_n - v_n$ est une série positive équivalente à la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ qui est convergente par Riemann.

   ii. Comme v_n est le t.g. d'une série alternée dont le terme de signe constant est $\frac{1}{n}$ tendant vers 0. Ainsi, la série de t.g. v_n converge. Comme $u_n - v_n$ est le t.g. d'une série convergente on a la série de t.g. qui est la somme des deux précédentes $u_n - v_n + v_n = u_n$ qui est donc convergente.

   (b) Seconde méthode

   i. Pour x au voisinage de 0, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$.

   ii. Pour tout n grand, on a $\frac{(-1)^n}{n}$ qui est proche de 0, ainsi
   $$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n}\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{n} + o(\frac{1}{n})\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}). \end{aligned}$$

   iii. Le premier terme du développement de u_n est convergent comme t.g. d'une série alternée, tandis que le second est le t.g. d'une série convergente d'après Riemann. Enfin $|o(\frac{1}{n^2})| < \frac{1}{n^2}$ qui sont des t.g. positifs, avec le majorant t.g. d'une série convergente.

2. (a) Première méthode

   i. Pour tout entier $n \geq 1$, on prend $v_n = -\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

   ii. Le t.g.
   $$u_n - v_n = \frac{C-1}{(n+1)(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}})}$$
   est un t.g. à termes de signes constants équivalent à $\frac{C-1}{n+1}$. Ce t.g converge si et seulement si $C = 1$.

   iii. Comme v_n est le t.g. d'une série convergente (série alternée), on en conclut que u_n est le t.g. d'une série convergente si et seulement si $C = 1$.

(b) Seconde méthode

i. On effectue un DL à l'ordre 1 autour de 0 de la fonction $\frac{1}{1-x}$. Soit $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$.

ii. On développe u_n autour de $x = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$.

iii. Comme précédemment, on a une somme de t.g. d'une série alternéee et d'une série convergente si et seulement si $C = 1$.

Problème

1. Matrice de Vandermonde

(a)

$$VM_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$VM_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$det(VM_1(x)) = x_1 - x_0.$$

(d)

$$\begin{aligned}
det(VM_2(x)) &= det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix} \\
&= det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ x_0^2 - x_0^2 & x_1^2 - x_0x_1 & x_2^2 - x_0x_2 \end{pmatrix} \\
&= det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ 0 & x_1(x_1 - x_0) & x_2(x_2 - x_0) \end{pmatrix} \\
&= det\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ x_1(x_1 - x_0) & x_2(x_2 - x_0) \end{pmatrix} \\
&= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} \\
&= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = \prod_{0=j<k=2}(x_k - x_j).
\end{aligned}$$

(e) On suit l'indication donnée pour $p \geq 2$

$$det(VM_p(x)) = \prod_{k_0=0}^{p}(x_{k_0} - x_0)det(VM_{p-1}(x_1, \dots x_p))$$

Or, par hypothèse de récurrence

$$det(VM_{p-1}(x_1, \dots, x_p)) = \prod_{1=j<k=p}(x_k - x_j).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} det(VM_p(x)) &= \prod_{k_0=1}^{p}(x_{k_0}-x_0)\prod_{1=j<k=p}(x_k-x_j) \\ &= \prod_{0=j<k=p}(x_k-x_j). \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $p=2$, par ailleurs $det(VM_1(x))$ vérifie également cette hypothèse, ce qui achève la preuve pour tout $p \geq 1$.

(f) $det(VM_p(x)) = 0 \Longleftrightarrow \prod_{0=j<k=p}(x_k-x_j) = 0 \Longleftrightarrow \exists (j,k) \in \{0,\ldots,p\}$ avec $j<k$, tels que $x_j = x_k$.

2. Matrice de Hankel

(a)

$$H_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ x_0 & x_1^2 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$H_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2^2 \\ x_0 & x_1^2 & x_2^3 \\ x_0^2 & x_1^3 & x_2^4 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$H_3(x)\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2^2 & x_3^3 \\ x_0 & x_1^2 & x_2^3 & x_3^4 \\ x_0^2 & x_1^3 & x_2^4 & x_3^5 \\ x_0^3 & x_1^4 & x_2^5 & x_3^6 \end{pmatrix}.$$

(d) $det(H_1(x)) = x_1^2 - x_0x_1$ ou encore (en utilisant les substitutions de lignes)

$$\begin{aligned} det(H_1(x)) &= det\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & x_1^2 - x_0x_1 \end{pmatrix} \\ &= x_1 det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x_1 - x_0 \end{pmatrix} \\ &= x_1(x_1-x_0). \end{aligned}$$

Et, suivant la même méthode, $\det(H_2(x)) = x_1x_2^2(x_2-x_1)(x_2-x_0)(x_1-x_0)$

(e)

$$\det(H_2(x)) = \prod_{j=1}^{2} x_j^j \prod_{0=j<k=p}(x_k-x_j).$$

(f) On utilise les substitutions de lignes préconisées

$$det(H_3(x)) = \prod_{j=1}^{3} x_j^j det(VM_3(x_0,\ldots,x_3)).$$

(g) On procédera par récurrence. L'hypothèse de récurrence étant :

$$det(H_p(x)) = \prod_{j=1}^{p} x_j^j det(VM_p(x_0,\ldots,x_p)).$$

Cette hypothèse est vérifiée au rang $p = 1$. Et on a

$$det(H_p(x)) = \prod_{j=1}^{p} x_j^j det(VM_p(x_0, \dots, x_p)).$$

(h)

$$det(H_p(x)) = \prod_{j=1}^{p} x_j^j \prod_{0=j<k=p} (x_k - x_j).$$

(i) $det(H_p(x)) = 0$ signifie soit qu'il existe une valeur x_k nulle soit (sans exclusivité) qu'il existe deux valeurs x_j et x_k telles que $x_j = x_k$.

3. Aléa et matrice de Hankel.

(a)

$$EH_1(X) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(X) & \mathbb{E}(X^2) \end{pmatrix}.$$

(b)

$$EH_2(X) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{E}(X) & \mathbb{E}(X^2) \\ \mathbb{E}(X) & \mathbb{E}(X^2) & \mathbb{E}(X^3) \\ \mathbb{E}(X^2) & \mathbb{E}(X^3) & \mathbb{E}(X^4) \end{pmatrix}.$$

(c)

$$EH_3(X) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{E}(X) & \mathbb{E}(X^2) & \mathbb{E}(X^3) \\ \mathbb{E}(X) & \mathbb{E}(X^2) & \mathbb{E}(X^3) & \mathbb{E}(X^4) \\ \mathbb{E}(X^2) & \mathbb{E}(X^3) & \mathbb{E}(X^4) & \mathbb{E}(X^5) \\ \mathbb{E}(X^3) & \mathbb{E}(X^4) & \mathbb{E}(X^5) & \mathbb{E}(X^6) \end{pmatrix}.$$

(d)

$$\mathbb{E}(H_p(X_0, \dots, X_p)) = \mathbb{E}\left(\left(X_j^{i+j}\right)_{i,j=0,\dots,p}\right) = \left(\mathbb{E}(X^{i+j})\right)_{i,j=0,\dots,p}.$$

(e) $EH_p(X) = \mathbb{E}(H_p(X_0, \dots, X_p))$.

(f) On a $(p+1)!$ permutations possibles. Et comme $\mathbb{E}(X_k^j) = \mathbb{E}(X_{\sigma(k)}^j)$ quelle que soit la permutation σ considérée de $\mathcal{S}_{p+1} = \{0, \dots, p\}$, on a $EH_p(X) = \mathbb{E}(H_p(X_{\sigma(0)}, \dots, X_{\sigma(p)}))$. Ou encore

$$EH_p(X) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+1}} \frac{1}{(p+1)!} \mathbb{E}(H_p(X_{\sigma(0)}, \dots, X_{\sigma(p)})).$$

(g) $(X_1, X_0, X_2, \dots, X_p)$ est une permutation de $(X_0, \dots, X_p)$, et l'espérance d'une matrice étant égale à la matrice des espérances (car somme finie) d'après ce qui précède, on a

$$EH_p(X) = \mathbb{E}(H_p(X_1, X_0, X_2 \dots, X_p)).$$

(h)

$$\begin{aligned} det(EH_p(X)) &= \frac{1}{(p+1)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+1}} det(\mathbb{E}(H_p(X_{\sigma(0)}, \dots, X_{\sigma(p)}))) \\ &= \frac{1}{(p+1)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+1}} \mathbb{E}\left(det((H_p(X_{\sigma(0)}, \dots, X_{\sigma(p)})))\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(p+1)!}\mathbb{E}\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{p+1}}\left(\prod_{i=0}^{p} X^i_{\sigma(i)}\epsilon(\sigma)\prod_{0=j<k=p}(X_k - X_j)\right)\right)\\
&= \frac{1}{(p+1)!}\mathbb{E}\left(\prod_{0=j<k=p}(X_k - X_j)\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{p+1}}\left(\epsilon(\sigma)\prod_{i=0}^{p} X^i_{\sigma(i)}\right)\right)\\
&= \frac{1}{(p+1)!}\mathbb{E}\left(\prod_{0=j<k=p}(X_k - X_j)^2\right)
\end{aligned}
$$

(i) $det(EH_p(X)) = 0$ implique qu'il existe deux valeurs prises par X_k et X_j égales. Or comme X ne peut prendre que q valeurs distinctes, on a $q < p$. Pour tout $q \geq p$, on aura $det(EH_p(X)) > 0$

4. Ainsi la quantité $det(EH_p(X))$ permet à partir de la connaissance des $2p$ premiers moments de la variable X, d'établir le nombre de valeurs $a_1, \ldots, a_q$ distinctes sur lesquelles la variable X prend ses valeurs. Il n'est pas nécessaire de connaître les valeurs a_i elles-mêmes pour cela car le calcul de $det(EH_p(X))$ ne les demande pas.